# [容斥原理与多重集合{理论}](https://www.cnblogs.com/vectors07/p/7976446.html)

**首先介绍一个重要定理：**

**设S是有k种类型对象的多重集合，每种元素均具有无限的重复数。那么S的r组合的个数等于：IMG_256**

**问题一：多重集合的组合问题**

**问题描述：给定3个a，4个b，5个c，现在要选10个元素，求一共有多少种组合？**

**分析：本问题就是相当于求S={3·a,4·b,5·c}的10组合数。**

**首先，多重集合的组合有一个定理，定理描述如下：**

**设S是有k种类型对象的多重集合，每种元素均具有无限的重复数，那么S的r组合的个数等于：IMG_257**

**那么既然这样，我们令S∞={∞·a, ∞·b,∞·c}，那么S的10-组合数为IMG_258**

**设集合A是S∞的10-组合全体，则|A|＝66，现在要求在10-组合中的a的个数小于等于3，b的个数小于等于4，c的个数小于等**

**于5的组合数.**

**定义性质集合P={P1,P2,P3},其中：**

**P1：10组合中a的个数大于等于4；  
P2：10组合中b的个数大于等于5；  
P3：10组合中c的个数大于等于6；**

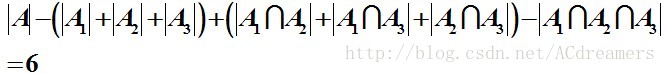
**将满足性质Pi的10-组合全体记为Ai(1≤i≤3).**

**那么，A1中的元素可以看作是由S∞的10－4＝6组合再拼上4个a构成的，所以IMG_259**

**同理有：IMG_260，IMG_261，**

**IMG_262**

**所以根据容斥原理，原问题的解为：**

****

**问题二：方程解的个数问题**

**(1)问题描述：已知非负整数IMG_264不大于7，求方程IMG_265整数解的个数。**

**分析：其实用容斥，跟上题一样，先求出总数，因为不可能出现两个或两个以上的数大于等于8，所以这里就简单很多了。**

**首先，S的10-组合数为：IMG_266，由于只会出现IMG_267中的一个大于等于8的情况，所以四种情况一样的，**

**其结果都是IMG_268，所以问题的解就是286-4\*10=246**

**(2)问题描述：求方程IMG_269整数解的个数，其中IMG_270**

**分析：对于这个问题需要先转化一下就跟上题一样了。**

**令：IMG_271，然后就有IMG_272，此类问题不再赘述。答案为21**

**问题三：集合划分问题**

**问题描述：将一个n元集合划分为r个非空子集，并给每个子集标上号1，2，3，...r，求划分方案数。**

**分析：设S为将n元集划分成有序r部分的全部划分方案集，注意这里每一部分可以为空，那么我们用总数减去为空的情况就可**

**以了，那么进一步有一个不为空，两个不为空，三个不为空，...等等。这样我们就可以容斥。**

**我们知道IMG_273 ，IMG_274， IMG_275**

**所以最后得到方案数为：IMG_276**

定理2.5.1　设S是有k种类型对象的多重集合，每种元素均具有无限的重复数。那么S的r组合的个数等于

IMG_256

证明　设S的k种类型的对象是a1，a2，…，ak，使得

S=｛∞·a1，∞·a2，…，∞·ak｝

S的任意r组合均呈｛x1·a1，x2·a2，…，xk·ak｝的形式，其中x1，x2，…，xk皆为非负整数，且x1+x2+…+xk=r。反过来，每个满足x1+x2+…+xk=r的非负整数序列x1，x2，…，xk对应于S的一个r组合。因此，S的r组合的个数等于方程

x1+x2+…+xk=r

的解的个数，其中x1，x2，…，xk是非负整数。我们证明，这些解的个数等于有两种不同类型对象且有r+k-1个对象的多重集合

T=｛r·1，(k-1)·\*｝

的排列的个数1。给定T的一个排列，k-1个\*把r个1分成k组。设第一个\*的左边有x1个1，在第一个\*和第二个\*之间有x2个1，…，在最后一个\*号的右边有xk个1。于是，x1，x2，…，xk是满足x1+x2+…+xk=r的非负整数。反之，给定非负整数x1，x2，…，xk，满足x1+x2+…+xk=r，我们可以把上述步骤倒推并构造T的一个排列2。于是，多重集合S的r组合的个数等于多重集合T的排列的个数，由定理2.4.2可知它等于

IMG_257

定理2.5.1的另一种表述方式是：在每个对象的供给是无限的情况下，k个不同对象的r组合个数等于

IMG_258

例如,如果k=4,r=5，则T={5·1,3·\*}所给定的排列是\*111\*\*11,这个排列对应的x1+x2+x3+x4=5的解为x1=0,x2=3,x3=0,x4=2。